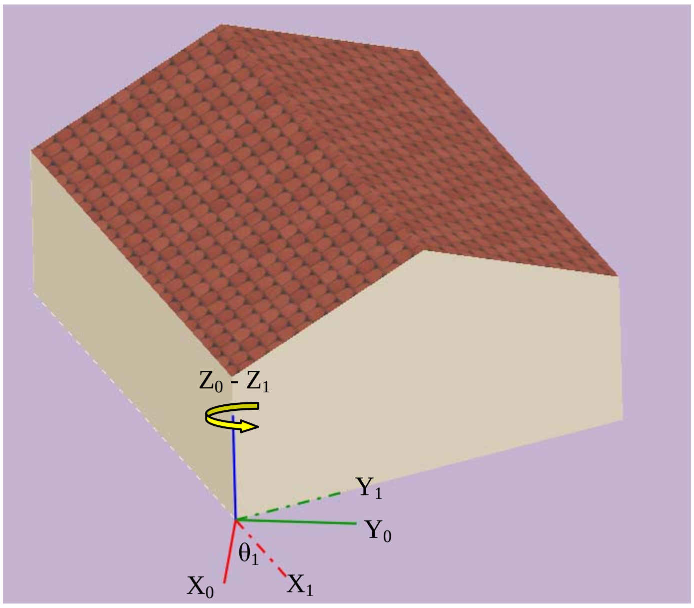
Partimos de unos ejes $(XYZ)_0$ orientados de tal forma que el eje X_0 (en rojo continuo en la imagen) lo esté hacia el sur, por lo que el eje Y_0 (en verde continuo) representará el este y el eje Z_0 (en azul continuo) la normal al suelo. Sobre esos ejes aplicamos un giro θ_1 sobre el eje Z_0 de forma que obtenemos el sistema de ejes $(XYZ)_1$ que serán solidarios con nuestro edificio (definimos el sentido de giro positivo según está en la figura para el criterio de ejes definido a derechas, hay que tener cuidado pues es al contrario al indicado en las instrucciones del IDAE)(en línea discontinua)



Para pasar del sistema de ejes $(XYZ)_0$ al sistema $(XYZ)_1$, tendríamos las expresiones

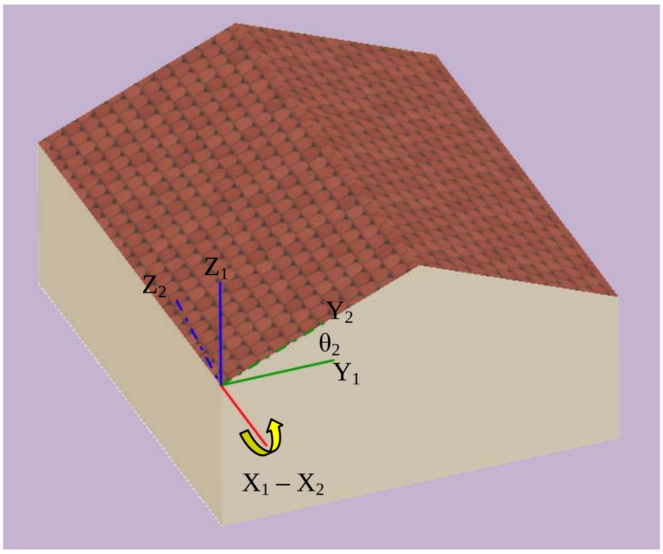
$$
\begin{aligned}
\vec{i}_1 &= \cos\theta_1 \vec{i}_0 + \sin\theta_1 \vec{j}_0 \\
\vec{j}_1 &= -\sin\theta_1 \vec{i}_0 + \cos\theta_1 \vec{j}_0 \\
\vec{k}_1 &= \vec{k}_0
\end{aligned}
$$

O expresado de forma matricial…

$$
\begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{pmatrix}
$$

Siendo $\vec{i}_n$ el vector unitario del eje X_n, $\vec{j}_n$ el vector unitario del eje Y_n y $\vec{k}_n$ el vector unitario del eje Z_n

A continuación considerando los mismos ejes $(XYZ)_1$ anteriores (por claridad los mostramos ahora en la esquina superior de la nave, en color continuo), damos un giro θ_2 alrededor del eje X_1 (rojo continuo, que corresponde con el eje longitudinal de la nave) de forma que el eje Y_2 (verde discontinuo) quede según la dirección del agua del lado del tejado donde consideraremos la instalación de los paneles. El eje Z_2 (azul discontinuo) quedará entonces perpendicular al tejado, hacia arriba. El sentido positivo del giro es el indicado para un sistema de ejes a derechas.



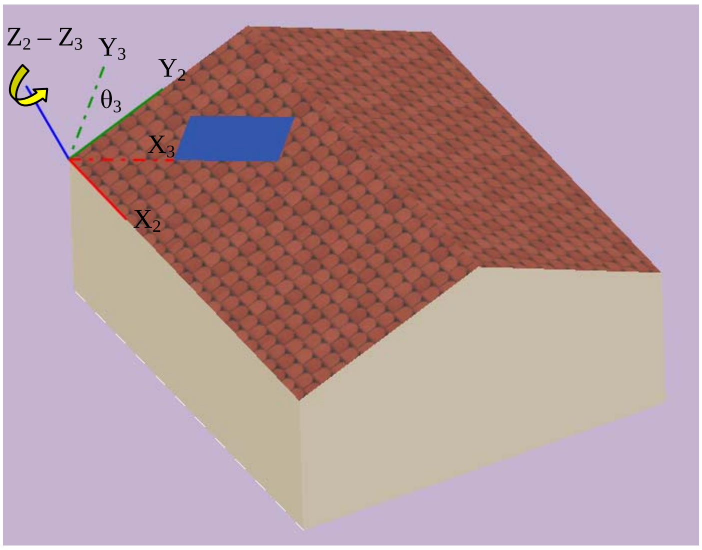
Para pasar del sistema de ejes $(XYZ)_1$ al sistema $(XYZ)_2$, tendríamos las expresiones

$$
\begin{aligned}
\vec{i}_2 &= \vec{i}_1 \\
\vec{j}_2 &= \cos\theta_2 \vec{j}_1 + \sin\theta_2 \vec{k}_1 \\
\vec{k}_2 &= -\sin\theta_2 \vec{j}_1 + \cos\theta_2 \vec{k}_1
\end{aligned}
$$

O expresado de forma matricial…

$$
\begin{pmatrix} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}_2 \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ 0 & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix}
$$

Trasladamos ahora los ejes a la parte de atrás de la nave y damos un giro θ_3 alrededor del eje Z_2 de forma que el eje longitudinal de la nave X_2 (en rojo continuo) pasa a tener la orientación del panel X_3 (rojo discontinuo). Este sería el ángulo que se daría a los paneles sobre la cubierta como orientación de los mismos. En la figura, por el momento el panel estaría "acostado" sobre el tejado, esto es, está en el mismo plano del tejado



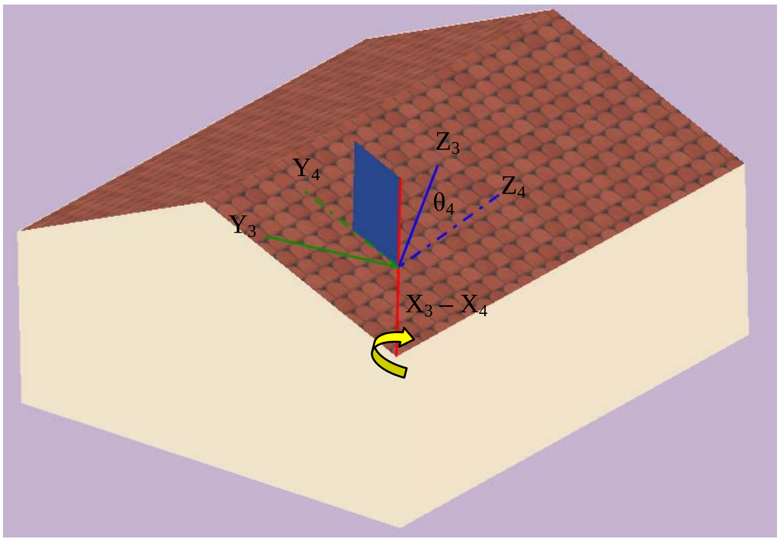
Para pasar del sistema de ejes $(XYZ)_2$ al sistema $(XYZ)_3$, tendríamos las expresiones

$$\vec{i}_3 = \cos\theta_3 \vec{i}_2 + \sin\theta_3 \vec{j}_2$$
$$\vec{j}_3 = -\sin\theta_3 \vec{i}_2 + \cos\theta_3 \vec{j}_2$$
$$\vec{k}_3 = \vec{k}_2$$

O expresado de forma matricial…

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_3 \\ \vec{j}_3 \\ \vec{k}_3 \end{pmatrix} = A_3 \begin{pmatrix} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}_2 \end{pmatrix}$$

Para clarificar el último giro, nos colocamos desde otra perspectiva para verlo mejor. Ahora lo que hacemos es dar un giro θ_4 alrededor del eje X_3 para "inclinar" el panel respecto del tejado. Después de esta secuencia de giros, el eje perpendicular al panel (la normal al mismo es el eje Z_4 (en azul discontinuo en la figura)



Para pasar del sistema de ejes $(XYZ)_3$ al sistema $(XYZ)_4$, tendríamos las expresiones

$$\vec{i}_4 = \vec{i}_3$$
$$\vec{j}_4 = \cos\theta_4 \vec{j}_3 + \sin\theta_4 \vec{k}_3$$
$$\vec{k}_4 = -\sin\theta_4 \vec{j}_3 + \cos\theta_4 \vec{k}_3$$

O expresado de forma matricial…

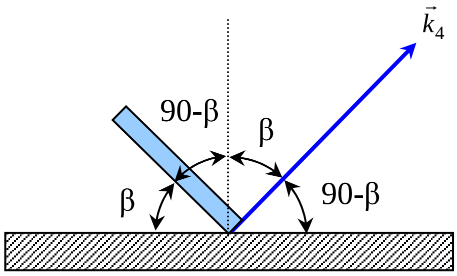
$$\begin{pmatrix} \vec{i}_4 \\ \vec{j}_4 \\ \vec{k}_4 \end{pmatrix} = A_4 \begin{pmatrix} \vec{i}_3 \\ \vec{j}_3 \\ \vec{k}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_4 & \sin\theta_4 \\ 0 & -\sin\theta_4 & \cos\theta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_3 \\ \vec{j}_3 \\ \vec{k}_3 \end{pmatrix}$$

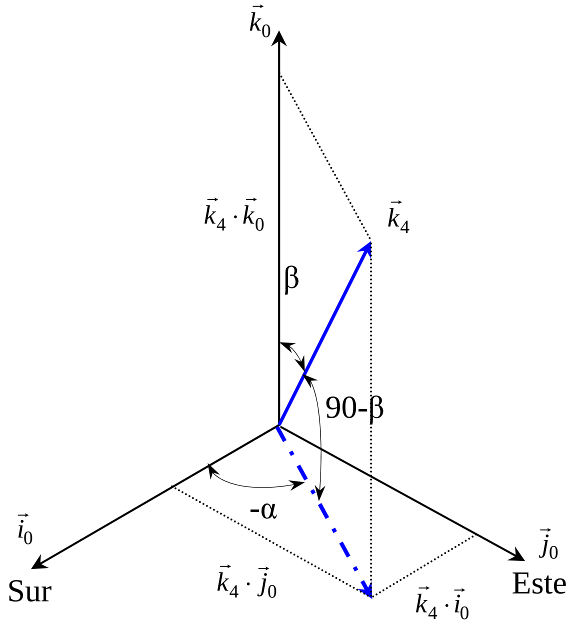
Para conocer las pérdidas que tendría el panel por orientación, a partir de las expresiones dadas en el pliego de condiciones técnicas del IDAE, necesitamos conocer el ángulo de inclinación β del módulo con respecto al plano horizontal (el suelo) y el ángulo de azimut α, que es el ángulo entre la proyección sobre el plano horizontal de la normal a la superficie del módulo y el meridiano del lugar.

Esto es, necesitamos la normal al módulo, que corresponde al eje $\vec{k}_4$, pero expresada en ejes $(XYZ)_0$. Habiendo calculado las matrices anteriores, las componentes de los vectores $\vec{i}_4$, $\vec{j}_4$ y $\vec{k}_4$ se pueden sacar de la expresión…

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_4 \\ \vec{j}_4 \\ \vec{k}_4 \end{pmatrix} = A_4 A_3 A_2 A_1 \begin{pmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{pmatrix}$$

El ángulo β está definido a través del módulo, no de la normal, pero como ambos forman 90º, se ve en la figura la equivalencia entre el ángulo del módulo y el suelo con el ángulo entre la normal y el suelo





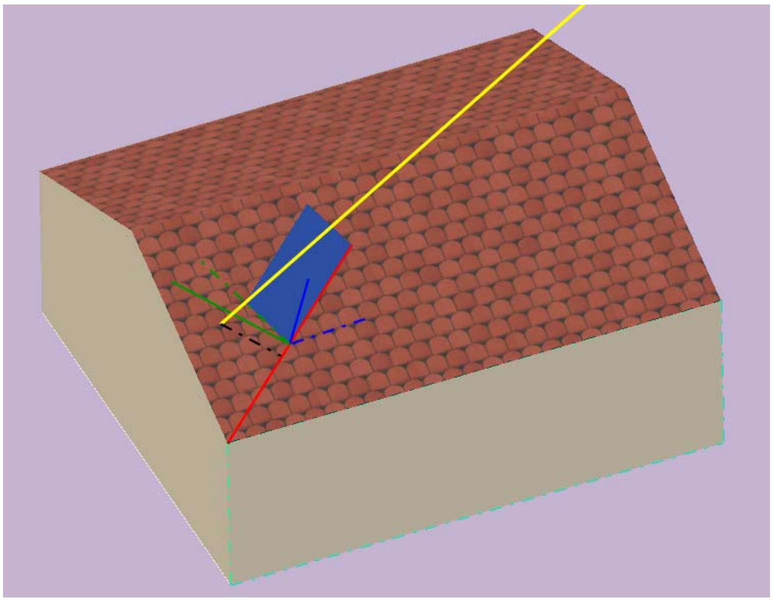
En la figura, se puede ver que el ángulo β lo obtendremos de

$$\beta = a\cos(\vec{k}_0 \cdot \vec{k}_4)$$

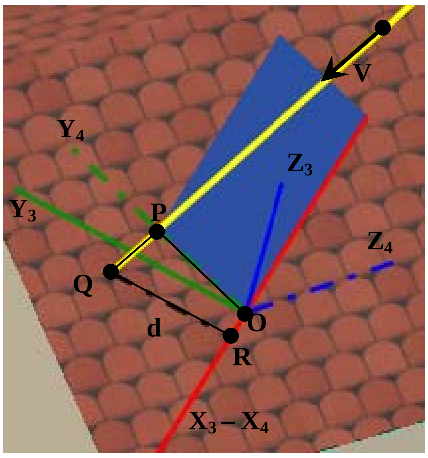
Y que el ángulo α lo obtendremos de

$$\alpha = -a\tan\left(\frac{\vec{k}_4 \cdot \vec{j}_0}{\vec{k}_4 \cdot \vec{i}_0}\right)$$

Para conocer la distancia a la que hay que colocar las hileras entre sí, tenemos que ver hasta donde llega la sombra del Sol un determinado día a una determinada hora. Para poder hacer este cálculo, podemos seguir el siguiente procedimiento



Empleando los mismos sistemas de ejes que hemos utilizado antes, nos centraremos en los sistemas 3 y 4, ligados al tejado (pero con el ángulo de colocación de las hileras de paneles respecto al eje de la nave) y al panel (ya teniendo en cuenta la inclinación del mismo respecto al tejado)



Una ampliación de la zona que nos interesa nos permite definir los siguientes puntos en la figura anterior:

O: Es el origen del sistema de ejes. No importa donde lo estemos considerando, pues queremos calcular distancias relativas entre hileras

P: Es el punto donde acaba el panel, siguiendo la línea del mismo. De acuerdo a la notación anterior de ejes, y considerando el alto del panel b, el vector formado de O a P sería: $OP = b\vec{j}_4$

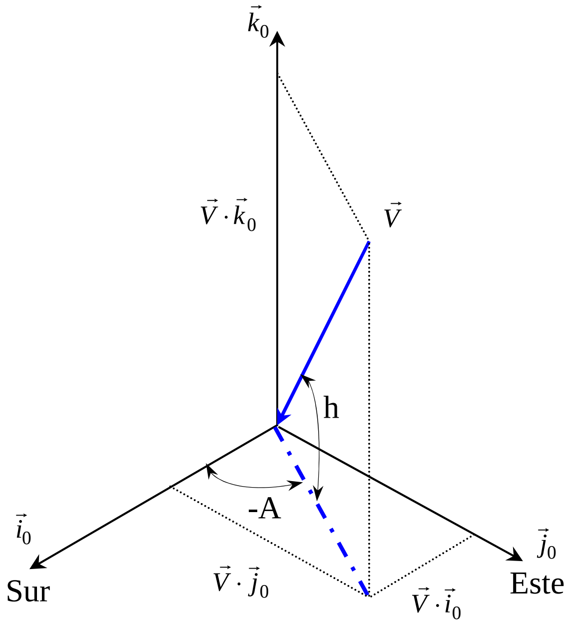
V: Es el vector que forma el rayo del Sol. Sus coordenadas se pueden calcular en ejes $(XYZ)_0$ a partir del acimut y la altura solar, pero nos interesará más tener sus componentes en ejes $(XYZ)_3$. Para pasar de un sistema de ejes a otro se podrán emplear las matrices de cambio calculadas anteriormente.

Q: Es el punto en el que un vector con la dirección del Sol (V) que pasa por el punto P, termina interceptando al plano del tejado. Sería el punto más alejado al eje $X_3 – X_4$ de la sombra del panel para ese día y esa hora

R: Si trazamos desde Q una línea perpendicular al eje $X_3 – X_4$ que esté contenida en el plano del tejado, la intersección con dicho eje $X_3 – X_4$ sería este punto R. Por lo tanto, la distancia entre Q y R es un vector que en nuestro sistema de ejes sería $RQ = d\vec{j}_3$, donde d es la distancia entre paneles que estamos buscando.

Nos queda por lo tanto traducir toda esta información a ecuaciones matemáticas.

Las coordenadas del vector V en los ejes $(XYZ)_0$ se sacarían de la siguiente figura, de forma muy similar a como hicimos antes para la normal del panel



$$\vec{V}\cdot\vec{i}_0 = -\cos h \cdot \cos(-A)$$
$$\vec{V}\cdot\vec{j}_0 = -\cos h \cdot \sin(-A)$$
$$\vec{V}\cdot\vec{k}_0 = -\sin h$$

En donde h es la altura solar y A es el acimut (he seguido la nomenclatura de Censolar y el ángulo de acimut se considera positivo hacia el Oeste).

Para pasar al sistema de coordenadas $(XYZ)_3$ utilizaríamos las matrices de cambio calculadas anteriormente a partir de

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_3 \\ \vec{j}_3 \\ \vec{k}_3 \end{pmatrix} = A_3 A_2 A_1 \begin{pmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{pmatrix}$$

Por no complicar el desarrollo en exceso, simplificaremos diciendo que después de hacer esos cálculos, las coordenadas del vector $\vec{V}$ en el sistema de ejes 3 serían

$$\vec{V} = V_x\vec{i}_3 + V_y\vec{j}_3 + V_z\vec{k}_3$$

El vector OP hemos dicho que sería $OP = b\vec{j}_4$, pero expresado en ejes $(XYZ)_3$ sería

$$OP = b\cos\theta_4\,\vec{j}_3 + b\sin\theta_4\,\vec{k}_3$$

Del álgebra lineal, se tendría que la línea que pasa por P y Q (la línea amarilla de la figura que representa el rayo de Sol) tendría la siguiente ecuación paramétrica:

$$x = OP_x + \lambda V_x = \lambda V_x$$
$$y = OP_y + \lambda V_y = b\cos\theta_4 + \lambda V_y$$
$$z = OP_z + \lambda V_z = b\sin\theta_4 + \lambda V_z$$

Donde según variamos el valor de λ, nos movemos en la recta. El valor de λ para tener el punto Q es el que hace z=0, ya que ese punto está en el plano del tejado y la distancia d hasta el punto R será entonces su coordenada y (esa es la razón de trabajar con ejes $(XYZ)_3$), por lo que entonces podemos sacar dicha distancia a partir de…

$$\left.\begin{aligned} d &= b\cos\theta_4 + \lambda V_y \\ 0 &= b\sin\theta_4 + \lambda V_z \end{aligned}\right\} \quad d = b(\cos\theta_4 - \frac{V_y}{V_z}\sin\theta_4)$$